

Տարբեր իմաստներով ունիվեռալ
Ֆունկցիաների գոյությունն ու կառուցվածքը և
որոշ դասերի ֆունկցիաների մոտարկումներ,
21AG - 1A066

Մարտին Գևորգի Գրիգորյան

ԵՊՀ Ֆիզիկայի ինստիտուտ, gmarting@ysu.am

Գծային և ոչ գծային մոտարկումների և դրանց կիրառման
լաբորատորիա, Տեսական և Մաթեմատիկական Ֆիզիկայի ամբիոն

Հետազոտական խմբի անդամներ.

1. Գրիգորյան Մարտին
2. Եպիսկոպոսյան Սերգո
3. Գոգյան Սմբատ
4. Սարգսյան Արծրուն
5. Գալոյան Լևոն
6. Սիմոնյան Լուսինե
7. Սարգսյան Ստեփան
8. Եպիսկոպոսյան Արմեն
9. Չալյան Գոռ

Արտասահմանյան գործընկեր.

Մայքլ Ռուժանսկի (Բելգիա, Գենտի համալսարանի
մաթեմատիկայի բաժանմունքի անալիզի և
դիֆիալասարորմների ուղղ. դեկավար)

ԹԵՄԱՅԻ ԻՐԱԿԱՆԱՑՄԱՆ ԸՆԹԱՑՔԸ ԵՎ

ՁԵՌՔԵՐՈՒՄՆԵՐԸ*

Հաշվետու ժամանակահատվածում լուծվել են մի շարք խնդիրներ, որոնք վերաբերվում են ֆունկցիոնալ որոշ տարածություններում դասական (եռանկյունաչափական, Ուոլշի, Հաարի, Վիլենկինի, ինչպես սովորական այլաէս էլ կրկնակի) համակարգերով (տարբեր իմաստներով) ունիվերսալ Ֆուրիեի շարքեր ունեցող ֆունկցիաների գոյությանն ու հատկություններին: Նկարագրվելու է այդ ունիվերսալ ֆունկցիաների կառուցվածքը: Լուծվել են նաև որոշ դասերի ֆունկցիաների ոչ գծային մոտակման խնդիրներ:

Հետագա շարադրանքի համար օգտվելու ենք հետևյալ նշանակումներից և սահմանումներից. $C(F)$ -ը $F \subseteq [a, b]$ -փակ բազմության վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիաների (բանախյան) տարածությունն է հավասարաչափ նորմով: $L^p(E)$ –ն E

-ում որոշված Լեբեգի իմաստով չափելի և $\int_E |f(x)|^p dx < \infty$ պայմանին բավարարող

ֆունկցիաների տարածությունն է, որտեղ $p > 0$ և $E \subset [a, b]$ –ն Լեբեգի իմաստով չափելի դրական չափ ունեցող բազմություն է ($|E| > 0$): $M[a, b]$ -ը չափելի (ոչ անպայման համարյա ամենուրեք վերջավոր), $L^0[a, b]$ –ն չափելի, համարյա ամենուրեք վերջավոր և $L^\infty[a, b]$ -ը չափելի, սահմանափակ, $[a, b]$ -ի վրա որոշված ֆունկցիաների տարածություններ են $U \in L^1[a, b]$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները

ըստ $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ օրթոնորմալ համակարգի նշանակենք $c_k(U) = \int_a^b U(x) \varphi_k(x) dx$ -ով:

Պարբերական $U \in L^1[-\pi, \pi]$ – ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները ըստ

* Նկարագրել (3-5 էջ, 12 տառաչափով, 1-1,5 միջտողային հեռավորությամբ, Unicode կոդավորմամբ հայերեն տառատեսակներով) թեմայի իրականացման ժամանակահատվածում կատարված աշխատանքների արդյունքները՝ պայմանագրով նախատեսված օրացուցային պլանին և առաջադրանքին համապատասխան: Ներկայացնել հիմնական արդյունքները, դրանց արդիականությունը և գիտական կամ գիտատեխնիկական նորույթը: Նկարագրել միջազգային համագործակցությանը նպաստող և արդեն իսկ իրականացված միջոցառումները:

եռանկյունաչափական համակարգի սահմանվում են հետևյալ կերպ

$$a_k(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos kx dx, k \geq 0; b_k(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \sin kx dx, k \geq 1:$$

Դիցուք Ω -ն $C(F)$, $M[a, b]$, $L^0[a, b]$ -կամ $L^p(E)$ $p \in (0, \infty)$, տարածություններից որևէ մեկն է և $S(x); S_N(x) \in \Omega, N = 1, 2, \dots$:

Կասենք, որ $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ -հաջորդականությունը զուգամիտում է $S(x)$ -ին Ω -ում, եթե այն զոգամիտում է $S(x)$ -ին հավասարաչափ, ըստ չափի, համարյա ամենուրեք կամ $L^p(E)$ $p \in (0, \infty)$, մետրիկայով՝ $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E |S_N(x) - f(x)|^p dx = 0$.

Սահմանում 1. $U \in L^1[-\pi, \pi]$ -ը Ω -տարածության համար $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ -օրթոնորմալ համակարգի նկատմամբ կանվանենք

4ա) ունիվերսալ ֆունկցիա (սովորական իմաստով) , եթե նրա Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունն ունիվերսալ է Ω -ում:

4բ) պայմանական ունիվերսալ ֆունկցիա, եթե գոյություն ունի նշանների հաջորդականություն $\{\delta_m = \pm 1\}_{m=1}^{\infty}$ այնպիսին, որ $\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m c_m(U) \varphi_m(x)$ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունն ունիվերսալ է Ω -ում:

4գ) համարյա ունիվերսալ ֆունկցիա, եթե կարելի է ընտրել *նշանների հաջորդականություն* $\{\varepsilon_m = \pm 1\}_{m=1}^{\infty}$, այնպիսին, որ $(\rho(\Lambda) = 1, \Lambda = \{k \in \mathbb{N}; \varepsilon_k = 1\})$ և $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m c_m(U) \varphi_m(x)$ շարքը լինի ունիվերսալ է Ω -ում:

4դ) նշանների իմաստով ունիվերսալ ֆունկցիա, եթե նրա Ֆուրիեի շարքը նշանների իմաստով ունիվերսալ է Ω -ում:

4ե) տեղափոխությունների իմաստով ունիվերսալ ֆունկցիա, եթե նրա Ֆուրիեի շարքը տեղափոխությունների իմաստով ունիվերսալ է Ω -ում:

Սահմանում 2. Կասենք, որ $U(x)$ ֆունկցիան և նշանների հաջորդականությունը $\delta = \{\delta_m = \pm 1\}_{m=1}^{\infty}$ Ω -տարածության համար $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ -համակարգի նկատմամբ կազմում են ունիվերսալ զույգ՝ (U, δ) -ը, եթե $\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m c_m(U) \varphi_m(x)$ շարքը ունիվերսալ է Ω -ում /մասնակի գումարների հաջորդականությունը խիտ է Ω -ում/:

Սահմանում 3. Կասենք, որ E - բազմությունն ու $U(x)$ ֆունկցիան $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - համակարգի նկատմամբ կազմում են ունիվերսալ զույգ՝ $(U,)$ -ը ուղղման իմաստով, եթե E բազմության վրա որոշված յուրաքանչյուր ինտեգրելի ֆունկցիա $f(x)$ հնարավոր լինի $[0,1]$ -ի վրա շարունակել այնպես, որ նոր ստացված ինտեգրելի ֆունկցիայի $F(x)$ -ի և $U(x)$ -ի $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ -համակարգով Ֆուրիեի գործակիցների մոդուլները լինեն հավասար՝ $|c_k(F)| = |c_k(U)|, k \geq 1$:

Սահմանում 4. Կասենք, որ $U(x)$ ֆունկցիան, նշանների հաջորդականություն $\delta = \{\delta_m = \pm 1\}_{m=1}^{\infty}$ և E - բազմությունը Ω - տարածության համար $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - համակարգի նկատմամբ կազմում են ունիվերսալ եռյակ՝ (U, δ, E) -ը, եթե նախ $\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m c_m(U) \varphi_m(x)$ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունն ունիվերսալ է Ω -ում և E բազմության վրա որոշված յուրաքանչյուր ինտեգրելի ֆունկցիա $f(x)$ հնարավոր լինի $[0,1]$ -ի վրա շարունակել այնպես, որ նոր ստացված ինտեգրելի ֆունկցիայի $F(x)$ և $U(x)$ -ի $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ -համակարգով Ֆուրիեի գործակիցների մոդուլները լինեն հավասար՝ $|c_k(F)| = |c_k(U)|, k \geq 1$:

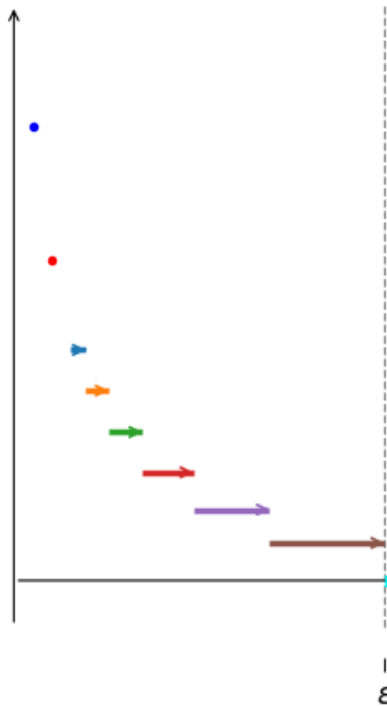
Ապացուցվել է, որ գոյություն ունեն 1-ին մոտ չափ ունեցող փակ բազմություն E և ինտեգրելի ֆունկցիա U այնպիսիք, որ (E, U) -ը ուղղման իմաստով եռանկյունաքափական համակարգի նկատմամբ հանդիսանա ունիվերսալ զույգ $L^p[0,1], 0 < p < 1$ -ի համար;

Հաջողվել է կառուցել ինտեգրելի ֆունկցիա, որի Ֆուրիեի շարքն ըստ եռանկյունաչափական համակարգի հանդիսանում է $L^p[0,1], 0 < p < 1$ - տարածությունում նշանների իմաստով ունիվերսալ շարք:

Նշենք, որ կոնկրետ առանձնացված դեպքերում, հատկապես եռանկյունաչափական և Ուոլշի, համակարգերի համար մոտեցումներն ու ստացված արդյունքները տարբեր են միմյանցից (օրինակ՝ $L^p[0,1], 0 < p < 1$ տարածությունների համար Ուոլշի համակարգերի նկատմամբ ունիվերսալ ֆունկցիա չկա, բայց կան նշանների իմաստով ունիվերսալ և պայմանական ունիվերսալ ֆունկցիաներ, $L^p[0,1], p \geq 1$ - տարածությունների համար գոյություն չունի եռանկյունաչափական համակարգերի նկատմամբ պայմանական ունիվերսալ ֆունկցիա) :

Թեորեմ 1. Գոյություն ունեն ինտեգրելի $U \in L^1[0,1]$ ֆունկցիա և $L_\mu^1[0,1]$ - կշռային տարածություն, որի համար $U(x)$ -ը հանդիսանում է Ուոլշի համակարգի նկատմամբ նշանների իմաստով իմաստով ունիվերսալ ֆունկցիա:

Թեորեմ 2. Գոյություն ունեն ինտեգրելի ֆունկցիա $U \in L^1[0,1]$, նշանների հաջորդականություն $\delta = \{\delta_m = \pm 1\}_{m=1}^\infty$ և չափելի E - բազմություն որոնք կազմում են (U, δ, E) -ունիվերսալ եղյակ է Ուոլշի համակարգի նկատմամբ $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$ տարածությունների համար:



Ինտեգրելի ֆունկցիաների տարածությունների համար եռանկյունաչափական և Ուոլշի համակարգերի նկատմամբ կառուցվել է ունիվերսալ զույգեր:

$L^2[0,1]$ – տարածության տրված օրթոնորմալ $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – բազիսի և անվերջի տարամիտող հաջորդականության միջոցով սահմանվել է ֆունկցիոնալ ենթադասեր, որոնց ֆունկցիաների համար ստացվել են տրված օրթոնորմալ բազիսի գծային կոմբինացիաներով լավագույն մոտարկման շեղման արագությունը բացահայտող գնահատականներ: Կիրառելով այդ գնահատականները Ուոլշի օրթոնորմալ բազիսի դեպքում, ստացնել են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ ազահ ալգորիթմի զուգամիտության արագության համար: , ինտեգրալ տեսքով՝

Թեորեմ 3. $\int_0^1 \int_0^1 (-\ln t)^\alpha t^{-1} [f(x \oplus t) - f(x)]^2 dx dt < \infty$ -ը անհրաժեշտ և բավարար

պայման է, որ $r_m(f) = \|f - G_m(x, f)\|_2 = o\left(\left(\frac{1}{\ln m}\right)^\alpha\right)$, $m \rightarrow \infty$ ՝ որտեղ $\{G_m(x, f)\}_{m=1}^{\infty}$ -

երը $f(x)$ – ի համար լավագույն մոտարկումը իրականացնող **ազահ**

(**գրիդի**) մոտարկիչների հաջորդականությունն է ըստ Ուոլշի համակագի:

,

Պարզվել է 2 փոփոխականի ինտեգրելի ֆունկցիայի գոյությունը, որի Ֆուրիեի կրկնակի շարքի անդամների հարմար նշաններ ընտրելով նոր ստացված շարքի ուղղանկյուն և սֆերիկ մասնակի գումարների հաջորդականությունը դառնում է

ամենորեք խիտ $L^p[-\pi, \pi]^2$, $p \in (0, 1)$ -ում:

Ստացված արդյունքները զեկուցվել են միջազգային գիտաժողովներում.

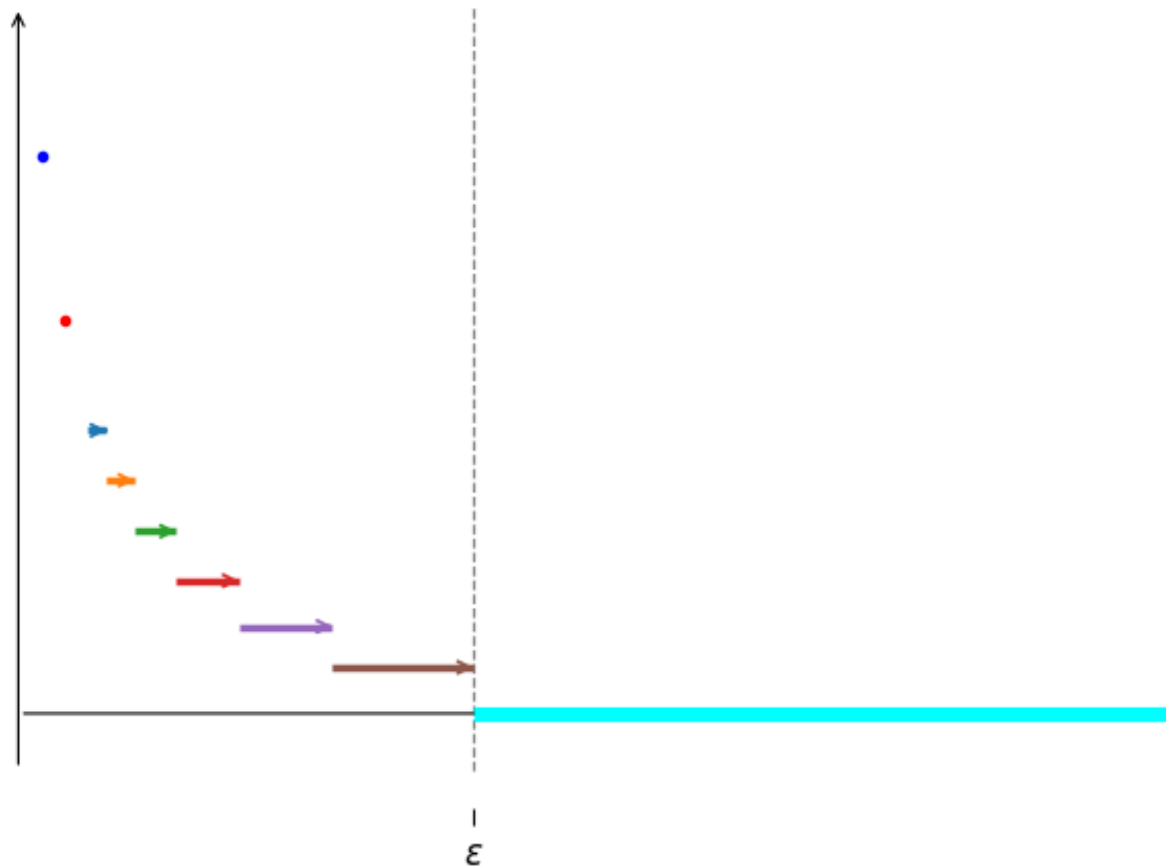
1. 2025 թ. հուլիսի 19-ից 22-ը Իտալիայի Սալեռնո քաղաքում կայացած միջազգային գիտաժողովում խմբի ղեկավարը հանդես է եկել **պլենար դասախոսությամբ:**
2. 2025թ. ապրիլի 1-30-ը (խմբի կատարող Սերգո Եպիսկոպոսյանը գործուղման ընթացքում) օտարերկրյա գործընկերոջ Բելգիայի Գենտի համալսարանի մաթեմատիկական անալիզի և դիֆ հավասարումների ուղղ. Գիտ. ղեկավար, պրոֆ. - Մայքլ Ռուժանսկիի հետ գիտական թեմայի շրջանակում ստացել են նոր արդյունքներ զեկուցվել է Գենտի “Անալիզ և դիֆհավասարումներ” սեմինարում ու միջազգային դպրոցում և ստացված արդյունքները համատեղ հոդվածների տեսքով պատրաստվում են հանձնել են տպագրության:
3. 2025թ. սեպտեմբերի 1-6 Բաթումիում կայացած միջազգային գիտաժողովում խմբի ղեկավարը հանդես է եկել **պլենար դասախոսությամբ:**

Հաշվետու ժամանակահատվածում տպագրված հոդվածների ցուցակ.

- [1]. Григоряна М.Г. Об универсальных (в смысле знаков) рядах Фурье по системе Уолша, Матем. Сборник, 2024, 215, 6, 2-29
- [2]. Grigoryan M , G, Grigoryan, T.M, Simonyan L.S, On the Convergence Fourier Series and Greedy Algorithm by Multiplicative System, Extended Abstracts 2021/2022: Trends in Mathematics: Book Series, 2024, 3, 117-124,
- [3]. M.G. Grigorian , S. A. Episkoposian, T. M. Grigorian , On the universal pair with respect to the generalized Walsh system, Advances in Operator Theory, 2024, 9;3, 1-15
- [4]. Григоряна М.Г., Галоян Л.Н. Функции, почти универсальные в смысле знаков относительно тригонометрической системы и системы Уолша. Матем. заметки, 2024, 115 ; 6 934-939
- [5]. М. Г. Григорян, Л.Н.Галоян, Т.М. Григорян, Об универсальных парах относительно системы Виленкина, Известия высших учебных заведений. Математика , 69, 67-72, 2025.
- [6]. Григорян М. Г., Galoyan, L. N., On Conditionally Universal Functions, , J. of Contemp.Mathem. Anal., 60: 2, 87-95, 2025.
- [7]. Galoyan L. N., On the convergence of negative order Ces`aro means of Fourier and Fourier- Walsh series, Trends in Mathematics, (Book Series) volume 13, 111-117, 2025.
- [8]. A. A. Sargsyan, On Universal Fourier–Walsh Series, Journal of Contemp. Mathem. Anal. 60: 2, 96-103, 2025.
- [9]. Arthur Kobelyan and Artsrun Sargsyan, On the convergence hard sampling operators, Trends in Mathematics, (Book Series) volume 13, 149-155, 2025.
- [10]. М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, Об универсальных двойных рядах Фурье, Матем. заметки, 117:5, 874-879 , 2025
- [11]. Grigoryan M,G., Sargsyan A.A., On Universal Pairs with Respect to Walsh System J. of Contemp. Mathem. Anal. , 60: 3, 175–183 , 2025.
- [12] Artsrun Sargsyan and Martin Grigoryan, On the universal functions for weighted spaces, Trends in Mathematics, (Book Series) volume 13, 185-190, 2025.

Ֆինանսական հաշվետնությունը.

- 1. Աշխատանքի վարձատրություն 26 100 հազար դրամ,
- 2. Ձեռք են բերվել 1 դեկավարի աթոռ 90 հազար դրամ և 1 օդորակիչ - 134հազար, դրամ
- 3. Գործուղման ծախսերը՝ 1 752 հազար դրամ .



Դիտողություն 1. Նշենք, որ դասական համակարգերի նկատմամբ վերը նշված տարածությունների համար սովորական իմաստով ունիվերսալ ֆունկցիաներ չկան, և մենք կառուցել ենք պայմանական և համարյա ունիվերսալ ֆունկցիաներ եռանկյունաչափական և Ուոլշի համակարգերի նկատմամբ չափելի ֆունկցիաների տարածությունում:

Թեորեմ 4. Գոյություն ունի ինտեգրելի ֆունկցիա $U \in L^1[0,1]$ (վերը նշված տեսքի), որը ունիվերսալ է նշանների իմաստով Ուոլշի համակարգերի նկատմամբ չափելի ֆունկցիաների տարածության համար:

Դիտողություն 2 . Եռանկյունաչափական համակարգի նկատմամբ չափելի ֆունկցիաների տարածությունն համար նման թեորեմի գոյությունը բացահայտված չէ:

ՇՆՈՐՀԱԿԱԼՈՒԹՅՈՒՆ